

Método Simplex - Exemplos

Edna A. Hoshino

Facom - UFMS

março de 2010

1 O método Simplex

- Exemplo

Exemplo 1

$$\begin{array}{ll}
 z = \max & x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a.} & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
 & x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

na forma padrão:

$$\begin{array}{llllllll}
 z = \max & x_1 & + & 2x_2 & & & & \\
 \text{s.a.} & 2x_1 & + & x_2 & + & y_1 & & = 4 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & & + & y_2 & = 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & + & y_3 = 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & y_1, & & y_2, & & y_3 \geq 0
 \end{array}$$

Iteração 1 - variáveis básicas: y_1, y_2, y_3

Base $B = I$ e $B^{-1} = I$.

Uma vez que $z = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$, temos que:

$$z = 0 + 1x_1 + 2x_2.$$

Custo reduzido de x_1 é 1 e de x_2 é 2. Portanto, x_2 é um bom candidato para entrar na base. Quem deve sair da base?

Reescrevendo as variáveis básicas em função das variáveis não-básicas, nos dá uma dica de qual variável básica limita o aumento da variável não-básica que está entrando na base (variável x_2 no exemplo).

Exemplo 1 (cont.)

Como $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_{x_N}$ temos:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$y_1 = 4 - 2x_1 - x_2$$

$$y_2 = 6 - x_1 - 3x_2$$

$$y_3 = 3 - x_1 - x_2.$$

Portanto, x_2 não pode ser maior que 2, caso contrário, y_2 violará a restrição de não-negatividade.

Iteração 2 - entra x_2 sai y_2

Variáveis básicas: y_1, x_2, y_3 .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que $z = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$, temos que:

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ou seja, $z = 4 + 1/3x_1 - 2/3y_2$ e, portanto, x_1 tem custo reduzido positivo!

Exemplo 1 (cont.)

Como $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_{x_N}$ temos:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$y_1 = 2 - 5/3x_1 + 1/3y_2$$

$$x_2 = 2 - 1/3x_1 - 1/3y_2$$

$$y_3 = 1 - 2/3x_1 + 1/3y_2.$$

Portanto, x_1 não pode ser maior que 6/5, caso contrário, y_1 violará a restrição de não-negatividade.

Iteração 3 - entra x_1 sai y_1

Variáveis básicas: x_1, x_2, y_3 .

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que $z = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$, temos que:

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ou seja, $z = 66/15 - 1/5y_1 - 3/5y_2$ e, portanto, nenhuma variável não-básica tem custo reduzido positivo! Páre! Solução básica é ótima!

Solução ótima

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 3/5.4 - 1/5.6 + 0.6 = 6/5 \\
 x_2 &= -1/5.4 + 2/5.6 + 0.3 = 8/5 \\
 y_3 &= -2/5.4 - 1/5.6 + 1.3 = 1/5 \\
 y_2 &= 0 \\
 y_1 &= 0
 \end{aligned}$$

Passos principais

$$\begin{aligned}
 z &= \max \quad cx \\
 s.a. \quad Ax &= b \\
 x &\geq 0
 \end{aligned}$$

- (1) Escolha um conjunto de variáveis básicas e defina base B ;
- (2) Resolva o sistema $Bx_B = b$. Como B é base então solução é única e dada por $x_B = B^{-1}b$, $x_N = 0$ e $z = c_B x_B$;
- (2) Calcule $c_j - z_j$, custo reduzido para cada variável não-básica x_j . Seja k tal que $c_k - z_k \geq 0$. Se não existir k então páre.
- (3) x_k entra na base e x_r , variável não-básica bloqueante que limita o crescimento de x_k e deve sair da base é aquela que minimiza a razão:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m: y_{ik} > 0} \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$$

- (5) Atualize a base e volte ao passo (2).

lembrando...

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_j &= c_j - B^{-1}a_j \\
 y_j &= B^{-1}a_j \\
 \bar{b} &= B^{-1}b.
 \end{aligned}$$

Exercícios

- 1 Resolva o seguinte programa linear usando o método simplex:

$$\begin{aligned}
 z &= \min \quad x_1 + x_2 \\
 s.a. \quad x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
 x_2 &\leq 1 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- 2 Resolva o seguinte programa linear

$$\begin{aligned}
 z &= \max \quad 5x_1 + 4x_2 \\
 s.a. \quad x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
 2x_1 - x_2 &\leq 4 \\
 5x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- 1 graficamente e
- 2 usando o método simplex.

Tableau Simplex

Resolver

$$\begin{aligned} z = \min \quad & c_B x_B + c_N x_N \\ \text{s.a.} \quad & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.a.} \quad & z - c_B x_B - c_N x_N = 0 \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

Como B é inversível,

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

e

$$z + 0x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b.$$

Tableau Simplex - cont.

Então, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} z + 0x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N &= c_B B^{-1}b \\ Ix_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\ x_B, x_N &\geq 0 \end{aligned}$$

cuja matriz de coeficientes estendida com o RHS é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_B B^{-1}N - c_N & c_B B^{-1}b \\ 0 & I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{bmatrix}$$

que é exatamente o conteúdo do tableau.

Tableau Simplex - cont.

O conteúdo inicial do tableau é:

	z	x_B	x_N	rhs
z	1	$-c_B$	$-c_N$	0
x_B	0	B	N	b

Após uma sequência de operações elementares, obtemos I no lugar de

$$\begin{bmatrix} 1 & -c_B \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

no tableau. Isso significa que o tableau resultante após essas operações equivale a pré-multiplicar o tableau original pela inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & -c_B \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

que é igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

Tableau - cont.

Logo, aplicar pivoteamentos no tableau equivale ao resultado da multiplicação:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -c_B & -c_N & 0 \\ 0 & B & N & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_B B^{-1}N - c_N & c_B B^{-1}b \\ 0 & I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tableau Simplex - exemplo

Exemplo:

$$\begin{aligned}
 z = \max \quad & x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 + y_1 = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 + y_2 = 6 \\
 & x_1 + x_2 + y_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Tableau inicial - iteração 1 (y_1, y_2 e y_3 variáveis básicas)

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	rhs
z	0	0	0	-1	-2	0
y_1	1	0	0	2	1	4
y_2	0	1	0	1	3	6
y_3	0	0	1	1	1	3

Solução não é ótima, pois x_2 tem custo reduzido positivo!

Exemplo - iteração 2

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	rhs
z	0	0	0	-1	-2	0
y_1	1	0	0	2	1	4
y_2	0	1	0	1	3	6
y_3	0	0	1	1	1	3

$$\begin{aligned}
 l_0 &\leftarrow l_0 + 2l_2 \\
 l_1 &\leftarrow l_1 - l_2 \\
 l_2 &\leftarrow l_2/3 \\
 l_3 &\leftarrow l_3 - l_2
 \end{aligned}$$

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	rhs
z	0	2/3	0	-1/3	0	4
y_1	1	-1/3	0	5/3	0	2
x_2	0	1/3	0	1/3	1	2
y_3	0	-1/3	1	2/3	0	1

Solução não é ótima, pois x_1 tem custo reduzido positivo!

Exemplo - iteração 3

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	rhs
z	0	2/3	0	-1/3	0	4
y_1	1	-1/3	0	5/3	0	2
x_2	0	1/3	0	1/3	1	2
y_3	0	-1/3	1	2/3	0	1

$$\begin{aligned}
 l_0 &\leftarrow l_0 + l_1/3 \\
 l_1 &\leftarrow (3/5)l_1 \\
 l_2 &\leftarrow l_2 - l_1/3 \\
 l_3 &\leftarrow l_3 - (2/3)l_1
 \end{aligned}$$

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	rhs
z	1/5	3/5	0	0	0	22/5
x_1	3/5	-1/5	0	1	0	6/5
x_2	-1/5	6/15	0	0	1	8/5
y_3	-2/5	-1/5	1	0	0	1/5

Solução é ótima! $z = 22/5$ e solução ótima é $x_1 = 6/5$, $x_2 = 8/5$, $y_3 = 1/5$ e $y_1 = y_2 = 0$.

Exercício

1. Resolva o seguinte problema de programação linear pelo método simplex (utilize o tableau):

$$\begin{aligned}
 z = \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Simplex: caso ilimitado

Ocorre sempre que, num problema de minimização (maximização), existir uma variável não-básica x_k com custo reduzido negativo (positivo)

$$z_k - c_k > 0 \text{ (} z_k - c_k < 0 \text{) e } y_k \leq 0.$$

Uma vez que

$$x_B = B^{-1} - y_k x_k,$$

tem-se que x_k pode aumentar de valor indefinidamente!

Valor ótimo é $-\infty$ ($+\infty$) e pode ser obtido movendo o ponto extremo atual em direção ao raio extremo dado por:

$$d = \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix}$$

ou seja, $x_B = B^{-1}b + dx_k$ e $x_k \geq 0$.

Condição necessária e suficiente:

$$cd = [c_B c_N]d = -c_B y_k + c_k = -z_k + c_k < 0.$$